

ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δε θα πρωτοτυπήσουμε βέβαια διαβεβαιώνοντας για μια ακόμη φορά τη τεράστια συνδρομή της αρχαίας ελληνικής σκέψης στην εδραίωση του δυτικού πολιτισμού, τις θεωρητικές και πρακτικές βάσεις του οποίου έθεσαν οι αρχαίοι Έλληνες, ανακηρυσσόμενοι διεθνώς σαν οι «πατέρες» ή οι «γεννήτορες» όλων σχεδόν των επιστημών. Η επιστήμη όμως στην οποία ιδιαίτερα αυτοί αναδείχθηκαν και ανέπτυξαν με έναν επιστημονικό, εναργή και εμβριθή τρόπο ήσαν τα μαθηματικά όπου και εκδήλωσαν όλες σχεδόν τις αρετές του πνεύματός τους: την οξύνοια, την εφευρετικότητα, την ακρίβεια, τη σαφήνεια, τη λιτότητα, τη κομψότητα και την ομορφιά.

Δεν είναι παράξενο που οι θεμελιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούνται σήμερα στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών παραμένουν ίδιες, όπως ακριβώς τις δημιουργήσαν οι αρχαίοι Έλληνες. Η Ευκλείδεια γεωμετρία, που για αιώνες εκπαίδευσε τη Δυτική σκέψη, εξακολουθεί να διδάσκεται ακόμα και σήμερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε όλους τους λαούς του κόσμου γυμνάζοντας το πνεύμα των μαθητών στο ορθώς νοείν και στο επιστημονικώς σκέπτεσθαι. Εκτός από τα διαχρονικά «Στοιχεία» του Ευκλείδη και τα έργα των άλλων μεγάλων Ελλήνων μαθηματικών, όπως του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Πτολεμαίου, του Πάππου και άλλων αποτέλεσαν τη βάση πάνω στην οποία στηρίχθηκαν οι σοφοί της Αναγέννησης για να οδηγηθούν στις νεότερες τεχνολογικές ανακαλύψεις.

θα δώσουμε παρακάτω μια σύντομη συνοπτική ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης των αρχαίων Ελλήνων διακρίνοντας πέντε βασικές περιόδους ανάπτυξης, ξεκινώντας από τους προσωκρατικούς τον 6^ο π.χ. αιώνα και καταλήγοντας στους τελευταίους μεγάλους νεοπλατωνικούς φιλοσόφους Δαμάσκιο και Σιμπλίκιο και τη διάλυση της Σχολής των Αθηνών από τον Ιουστινιανό.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (6^{ος} αιώνας π.χ. - 450 π.χ.)

Ο πατέρας ή θεμελιωτής της Ελληνικής θεωρητικής γεωμετρίας είναι ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624-546π.χ.), στον οποίο αποδίδονται τα εξής θεωρήματα:

- Κάθε διάμετρος κύκλου διαιρεί το κύκλο σε δυο ίσα μέρη
- Οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
- Οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες
- Αν δοθεί η βάση και οι προσκείμενες γωνίες ενός τριγώνου, τότε το τρίγωνο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι πλευρές δύο ομοίων τριγώνων είναι μεταξύ τους ανάλογες
- Το γνωστό «Θεώρημα του Θαλή» κατά το οποίο δυο ευθείες που τέμνουν τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν μεταξύ τους τμήματα ανάλογα.

Με μαθηματικά προβλήματα ασχολήθηκαν και άλλοι προσωκρατικοί φιλόσοφοι.

ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

Μετά τους προσωκρατικούς, μεγάλη ώθηση στη μαθηματική σκέψη έδωσαν οι πυθαγόρειοι οι οποίοι ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την οντολογική ερμηνεία των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, διαχωρίζοντας έτσι τη «καθαρή» ή φιλοσοφική αριθμητική από την πρακτική αριθμητική ή *λογιστική*. Στην αρχή οι Πυθαγόρειοι χώρισαν τους αριθμούς σε άρτιους και περιττούς και μετά όρισαν πολλά άλλα είδη αριθμών όπως τους αρτιοπέριττους, περισσάρτιους, αρτιάκис άρτιους, τέλειους, υπερτελείς, ελλιπείς, φιλίους κ.λ.π. Για τον προσδιορισμό των οντολογικών ιδιοτήτων

των αριθμών ελάμβαναν υπ' όψη τους τόσο τα γινόμενα όσα και τα αθροίσματα με τα οποία αυτοί παράγονται. Π.χ. η δεκάδα, επειδή προκύπτει από την πρόσθεση των τεσσάρων πρώτων αριθμών ($1+2+3+4=10$) θεωρείται ότι συγκεντρώνει όλα τα προσόντα τους.

Στην αριθμητική ανακάλυψαν:

- Ότι το άθροισμα των διαδοχικών περιττών αριθμών δίνει πάντα ένα τέλειο τετράγωνο, σύμφωνα με το τύπο: $1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$, ενώ το άθροισμα των διαδοχικών αρτίων: $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ ισούται με το μισό του τελευταίου όρου στη σειρά επί τον επόμενο του αριθμό.
- Τρία είδη αναλογιών: την αριθμητική, τη γεωμετρική και την υπεναντίαν ή αρμονική. Οι ανακαλύψεις τους αυτές εφαρμόστηκαν και στη μουσική, διότι θεωρήθηκε ότι τα μουσικά διαστήματα αντιστοιχούν στους αριθμητικούς λόγους των μηκών των χορδών, εφόσον η τάση των χορδών παρέμεινε η ίδια.
- Μπορούσαν να εξετάζουν εξισώσεις με n αγνώστους, τους οποίους παρίσταναν με λέξεις και όχι με σύμβολα.

Οι κυριότερες ανακαλύψεις τους στη γεωμετρία ήσαν οι εξής:

- Ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι το άθροισμα όλων των γωνιών γύρω από ένα σημείο ισούται με τέσσερες ορθές.
- Απέδειξαν ότι το άθροισμα των γωνιών παντός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.
- Διαιρούσαν τα γεωμετρικά σχήματα και τα συνέθεταν με τρίγωνα.
- Ανακάλυψαν τα λεγόμενα «κοσμικά στερεά» που αντιστοιχούν στα τέσσερα στοιχεία του σύμπαντος, δηλαδή το τετράεδρο (φωτιά), το οκτάεδρο (αέρα), το εικοσάεδρο (νερό) και το κύβο (γη). Στο πέμπτο κανονικό πολύεδρο, το δωδεκάεδρο, αντιστοιχήθηκε αργότερα το στοιχείο του Αιθέρα ή η «σφαίρα του παντός». Όπως απέδειξε η έρευνα γνώριζαν εμπειρικά την ύπαρξη αυτών των πέντε κανονικών σωμάτων, αλλά όχι και τη γεωμετρική τους κατασκευή, η οποία προϋποθέτει να έχουν λυθεί προηγουμένως τα προβλήματα που σχετίζονται με τα ασύμμετρα μεγέθη, πράγμα που επιτεύχθηκε μόνο το 4^ο αιώνα από το Θεαίτητο.
- Έθεσαν το πρόβλημα της κατασκευής σχήματος που να είναι ίσο με ένα άλλο δοθέν σχήμα και όμοιο προς ένα άλλο επίσης δοθέν τμήμα.
- Η πιο σημαντική όμως ανακάλυψη από τον Πυθαγόρα του περίφημου Πυθαγόρειου Θεωρήματος που λέει ότι το τετράγωνο της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του.

Προσπαθώντας να υπολογίσουν με το πυθαγόρειο θεώρημα της διαγώνιο ενός τετραγώνου, οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη των ασυμμέτρων μεγεθών. Η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμμετρη προς τη πλευρά του, δε σχηματίζει δηλαδή με αυτή ένα «ρητό» λόγο. Αυτό θεωρήθηκε πολύ παράξενο και ανεξήγητο, γιατί πίστευαν ότι τα πάντα είναι αριθμοί και ότι σε κάθε ον αντιστοιχεί ένας αριθμός, ενώ η διαγώνιος του τετραγώνου έδειχνε να παραβιάζει αυτή τη γενική αρχή. Αναγκάστηκαν έτσι να δεχθούν ότι εκτός από τα «ρητά» υπάρχουν στη φύση και τα άρρητα ή «άλογα» μεγέθη που διαταράσσουν τις αρμονικές σχέσεις. Η ανακάλυψή τους αυτή κλόνισε έτσι τη θεωρία τους περί συμμετρων μόνο και αρμονικών μεγεθών που υπόκεινται στο λόγο και κατάλαβαν ότι δεν μπορούσαν να προχωρήσουν στις γεωμετρικές τους έρευνες χρησιμοποιώντας μόνον ακεραίους αριθμούς.

Συμπεριέλαβαν επίσης τις μαθηματικές ανακαλύψεις τους σε ένα ενιαίο σύστημα, ώστε να μπορούν να μεταδοθούν εύκολα σε «μαθήματα» στις επόμενες γενεές. Από την άποψη της

μεθοδολογίας έθεσαν τις πρώτες βάσεις της μαθηματικής επιστήμης και ανήγαγαν την απόδειξη σε μια αυστηρά λογική διαδικασία. Χρησιμοποίησαν ιδιαίτερα σαν αποδεικτική μέθοδο την «εις άτοπον απαγωγή».

ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (450 π.χ.- 386π.χ)

Με την ανακάλυψη των ασυμμέτρων μεγεθών οι Πυθαγόρειοι κατάλαβαν ότι δεν μπορούν οι μαθηματικές σχέσεις των όντων να εκφραστούν μόνο με ακεραίους αριθμούς. Αναγκάστηκαν έτσι να δεχθούν ότι τα γεωμετρικά μεγέθη είναι διαιρετά επ' άπειρον και αποτελούνται από άπειρα πολύ μικρά ή απειροστά τμήματα. Την έννοια μιας απείρως μικρής ποσότητας που τείνει στο μηδέν, χωρίς να μπορεί όμως να μηδενιστεί, την εξέφρασε με ακρίβεια πρώτος ο **Αναξαγόρας**. Ο **Ζήνωνας** από τη μεριά του καταπολέμησε αυτή την άποψη με επιχειρήματα που έχουμε ήδη εξετάσει στο κεφάλαιο των προσωκρατικών φιλοσόφων, όπως και τη συμβιβαστική λύση που έδωσε ο **Δημόκριτος** με την ατομική θεωρία του. Με τις αντιλήψεις τους ο Δημόκριτος και ο Αναξαγόρας μπορούν να θεωρηθούν σα θεμελιωτές του απειροστικού λογισμού.

Η συνεχής επίλυση μαθηματικών προβλημάτων οδήγησε τελικά τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς στη συνειδητοποίηση της χρησιμοποιούμενης αποδεικτικής μεθόδου, αν και η αναλυτική μέθοδος διατυπώθηκε πιο συγκεκριμένα αργότερα από τον Πλάτωνα.

Κατά το δεύτερο μισό του 5^{ου} π.χ. αιώνα οι Έλληνες μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τα ασύμμετρα μεγέθη και με την επίλυση των τριών μεγάλων γεωμετρικών προβλημάτων της αρχαιότητας: το **τετραγωνισμό του κύκλου** (την εύρεση ενός τετραγώνου που να έχει ίδιο εμβαδόν με δοθέντα κύκλο), το **διπλασιασμό ενός κύβου** ή **Δήλιο Πρόβλημα** (την εύρεση ενός κύβου που να έχει διπλάσιο όγκο από ένα δοθέντα κύβο) και τη **τριχοτόμηση μιας γωνίας**. Με τα ασύμμετρα μεγέθη ασχολήθηκε ο Κυρηναίος **Θεόδωρος**, δάσκαλος στη γεωμετρία του Πλάτωνα. Αυτός απέδειξε ότι εκτός της τετραγωνικής ρίζας του 2, με την οποία συνδέεται η διαγώνιος ενός τετραγώνου, ασύμμετρα ήσαν και τα μεγέθη που αντιστοιχούσαν ποσοτικά στις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 3,5,7,8,10,11,12,13,14,15 και 17. Η αύξηση αυτή των ασυμμέτρων μεγεθών μεγάλωσε την υπάρχουσα κρίση στα μαθηματικά και μερικοί εξέφρασαν αμφιβολίες για τη δυνατότητα της περαιτέρω ανάπτυξής τους. Η κρίση αυτή ξεπεράστηκε όπως θα δούμε από τον Εύδοξο το 4^ο π.χ. αιώνα.

Ο Τετραγωνισμός του Κύκλου

Με τον τετραγωνισμό του κύκλου ασχολήθηκαν ο Αναξαγόρας, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Ιππίας ο Ηλείος, Ο Βρύσωνας και ο Αντιφώντας. Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** αφού «τετραγώνισε» τους περίφημους μηνίσκους του, ανακάλυψε και άλλους μηνίσκους τους οποίους επίσης τετραγώνισε. Ο σκοπός του ήταν να τετραγωνίσει όλα τα είδη των μηνίσκων και να φτάσει με αυτό το τρόπο στο τετραγωνισμό του κύκλου, διότι νόμιζε ότι ο κύκλος μπορεί να αναλυθεί πλήρως σε μηνίσκους, χωρίς να αφήνει καθόλου κενά. Επειδή όμως αυτό δεν ισχύει, η προσπάθειά του απέτυχε.

Ο σοφιστής **Αντιφώντας** από τη μεριά του ξεκινώντας από ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο στο κύκλο διπλασίαζε συνεχώς τον αριθμό των πλευρών του φέρνοντας από το κέντρο του κύκλου κάθετες στις πλευρές του, θεωρώντας ότι τελικά οι πλευρές του κανονικού πολυγώνου που εγγράφεται με αυτό το τρόπο θα συμπέσουν, λόγω της μικρότητας τους, με τη περιφέρεια του κύκλου. Οι αρχαίοι πάντως γεωμέτρες θεώρησαν τη λύση του σοφιστική, διότι συνέχεε την έννοια του «κατά προσέγγιση με την έννοια του απολύτως καθορισμένου», με άλλα λόγια ο

τετραγωνισμός του αναιρούσε την επ’ άπειρον διαιρετότητα ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Ο **Βρύσωνας** με τη σειρά του πρότεινε να τετραγωνιστεί το ενδιάμεσο πολύγωνο, μεταξύ των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων ενός κύκλου. Η λύση του αυτή κατά τη γνώμη των Νεοπλατωνικών συνέπιπτε με αυτή του Αντιφώντα , διότι και αυτός δεχόταν ότι συμπίπτουν οι γραμμές του εγγραφόμενου και περιγραφόμενου πολυγώνου με τη περιφέρεια του κύκλου. Κατά το Πρόκλο η λύση αυτή είναι εσφαλμένη, διότι δεν ισχύει ότι όταν δύο πράγματα είναι μεγαλύτερα και μικρότερα προς το ίδιο πράγμα, είναι και μεταξύ τους ίσα, όπως ισχυριζόταν ο Βρύσωνας. Αργότερα ασχολήθηκε με το τετραγωνισμό του κύκλου ο Αρχιμήδης και άλλοι.

Ο σοφιστής **Ιππίας ο Ηλείος** από τη μεριά του ανακάλυψε μια καμπύλη, που ονομάστηκε *τετραγωνίζουσα*, την οποία χρησιμοποίησε βασικά για τη τριχοτόμηση μιας γωνίας, αν και η ίδια χρησιμοποιήθηκε αργότερα και για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Παρόλο που δε γνωρίζουμε μέχρι ποιο σημείο είχε προχωρήσει στις ανακαλύψεις του, με τη μελέτη της καμπύλης του άνοιξε το δρόμο προς την ανώτερη γεωμετρία.

Το Δήλιο Πρόβλημα

Σχετικά τώρα με το Δήλιο Πρόβλημα λέγεται ότι κάποτε οι κάτοικοι της Δήλου πιεζόμενοι από ένα λοιμό ρώτησαν το μαντείο πώς να γλυτώσουν από την επιδημία και αυτό τους είπε πως έπρεπε να διπλασιάσουν τον όγκο ενός βωμού. Επειδή δεν μπορούσαν να βρουν πώς να το κάνουν, αποτάθηκαν στο Πλάτωνα και στους μαθηματικούς της Ακαδημίας του.

Επειδή ο διπλασιασμός του όγκου ενός κύβου αντιμετωπίζει ανάλογη δυσκολία με τα ασύμμετρα μεγέθη όπως και η εύρεση της διαγωνίου ενός τετραγώνου, θεωρείται ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν από πριν αυτό το πρόβλημα. Πρώτος ασχολήθηκε με την επίλυσή του ο Ιπποκράτης ο Χίος που το ανήγαγε στην εύρεση μιας διπλής μέσης αναλόγου ($\alpha : \chi = \chi : \psi = \psi : 2\alpha$) χωρίς να επιτύχει όμως την επίλυσή του. Το Δήλιο πρόβλημα λύθηκε τελικά από διάφορους μεταγενέστερους γεωμέτρες με τη βοήθεια ορισμένων καμπυλών που αυτοί επινόησαν, όπως π.χ. η κογχοειδής του Νικομήδους.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (386-323 π.χ.)

Στη τρίτη περίοδο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης κυριαρχεί η μορφή του Πλάτωνα (428-347π.Χ.) , ο οποίος παρότι είναι περισσότερο γνωστός σαν ένας μεγάλος φιλόσοφος, υπήρξε και ένας μεγάλος μαθηματικός. Παρόλη την ικανότητά του πάντως δεν ασχολήθηκε προσωπικά με την ανακάλυψη νέων μαθηματικών προτάσεων, έργο που άφηνε στους μαθητές στην Ακαδημία του και στους συνεργάτες του, τους οποίους και κατεύθυνε θέτοντάς τους τα προβλήματα με τα οποία έπρεπε αυτοί να ασχοληθούν. Ο βασικός λόγος γι’ αυτό ήταν η εμμονή του στην οντολογική αλήθεια και η θεώρησή του ότι τα μαθηματικά μια και εξαρτώνται από υποθέσεις είναι κατώτερα από τη καθαρή φιλοσοφία. Η παράδοση πάντως αναφέρει μερικές προσωπικές ανακαλύψεις του, όπως π.χ. τη λύση της αόριστης εξισώσεως $\chi^2 + \psi^2 = \omega^2$ για την οποία έδωσε το τύπο $(v^2-1)^2 + (2v)^2 = (v^2+1)^2$ και τη λύση του Δηλίου Προβλήματος με μια μηχανική κατασκευή που χρησιμοποιεί μετατόπιση και περιστροφή.

Ο Πλάτωνας ήταν ο πρώτος που πρόβαλε την ανάγκη ανάπτυξης της στερεομετρίας και κατεύθυνε προς αυτό το σκοπό τις έρευνες του μαθητή του Θεαίτητου. Θεμελίωσε επίσης την αναλυτική μέθοδο της επιστημονικής έρευνας και αναγνώρισε την παιδαγωγική αξία των μαθηματικών θεωρώντας τα σαν ένα γενικό εκπαιδευτικό μάθημα που οξύνει τη σκέψη και τη βοηθά στην αντιμετώπιση διάφορων προβλημάτων. Είναι γνωστό το ρητό «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω», να μην εισέλθει δηλαδή κανένας που δε γνωρίζει γεωμετρία, που υπήρχε στο πρόθυρο

της Ακαδημίας του. Ασχολήθηκε επίσης με τις αναλογίες, τη θεωρία των οποίων εφάρμοσε στον «Τίμαιο» για την αρμονική κατασκευή από το Δημιουργό της ψυχής του κόσμου, δείχνοντας έμμεσα με αυτό τη δυνατότητα της μαθηματικής αντιμετώπισης των διαφόρων κοσμικών φαινομένων.

Ο μαθητής του **Θεαίτητος** (415-369 π.χ.), καθοδηγούμενος από αυτόν εργάστηκε πάνω στο πρόβλημα των ασυμμέτρων μεγεθών και γενικεύοντας τις παρατηρήσεις του Θεόδωρου απέδειξε ότι η τετραγωνική ρίζα όλων των μη τετραγωνικών (ετερομήκων) ακεραίων αριθμών είναι ασύμμετρη. Προχωρώντας τις έρευνές του ανακάλυψε ότι υπάρχει ασυμμετρία και σε κυβικά μεγέθη. Απέδειξε τελικά ότι τα τετράγωνα που σχηματίζονται από ρητούς αριθμούς έχουν μεταξύ τους τη σχέση ενός τετραγώνου αριθμού προς ένα άλλο τετράγωνο αριθμό (π.χ. 4 : 9). Και αντίστροφα τα τετράγωνα που δεν έχουν μεταξύ τους (σαν εμβαδά) τη σχέση τετραγώνων αριθμών (π.χ. 3 : 5), παρόλο που είναι «δυνάμει» σύμμετρα, έχουν σχηματισθεί από ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η ανακάλυψή του αυτή συμπεριλήφθηκε στο 10ο βιβλίο του Ευκλείδη. Όχι μόνο απέδειξε το ασύμμετρο αυτών των τμημάτων, αλλά ασχολήθηκε και με τη γεωμετρική τους κατασκευή, μέσω της κατασκευής της μέσης αναλόγου.

Εκτός από τα ασύμμετρα μεγέθη ο Θεαίτητος ασχολήθηκε, μετά από παρότρυνση πάλι του Πλάτωνα, και με τη γεωμετρική κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων που μπορούν να εγγραφούν σε μια σφαίρα. Τις ανακαλύψεις του αυτές χρησιμοποίησε ο Πλάτωνας στον «Τίμαιο», όπου παρουσίασε τη σύσταση και τις γεωμετρικές ιδιότητες αυτών των στερεών και τα οποία ονομάστηκαν γι' αυτό το λόγο «Πλατωνικά Στερεά». Τα σώματα αυτά ήσαν ήδη γνωστά όπως είπαμε από τους Πυθαγορείους, αλλά δεν ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής τους, αφού περιελάμβανε τη γνώση ασυμμέτρων μεγεθών. Τις κατασκευές αυτές μπόρεσε να τις κάνει ο Θεαίτητος, ο οποίος και τα συνέκρινε με την ακτίνα της σφαίρας στην οποία εγγράφονται. Ο Θεαίτητος μπορεί να θεωρηθεί έτσι σαν ο πατέρας της στερεομετρίας. Ο Ευκλείδης περιέλαβε στο δέκατο τρίτο βιβλίο των «Στοιχείων» του αναλλοίωτες πολλές προτάσεις από το βιβλίο *«Περὶ τῶν Πέντε Σχημάτων»* του Θεαίτητου.

Ο Θεαίτητος βοηθήθηκε πολύ στις έρευνες του από το βιβλίο *«Περὶ Τομῆς»* του συμφοιτητή του και συνεργάτη του στην Ακαδημία Ευδόξου, τον οποίο και ο ίδιος βοήθησε με τις δικές του ανακαλύψεις.

Ο Εύδοξος

Είδαμε ότι η μη δυνατότητα χρησιμοποίησης της θεωρίας των αναλογιών στα ασύμμετρα ή «άλογα» μεγέθη δημιούργησε μια μεγάλη κρίση στα μαθηματικά, απειλώντας τη περαιτέρω ανάπτυξή τους. Με τη βοήθεια του δεύτερου μεγάλου μαθηματικού της Ακαδημίας **Ευδόξου** (408-353 π.χ.), κατόπιν καθοδηγήσεων του Πλάτωνα, η κρίση αυτή τελικά ξεπεράστηκε. Ο Εύδοξος ανέπτυξε μια γενικότερη θεωρία αναλογιών που προκαλεί ακόμα και σήμερα το θαυμασμό, η οποία μπορούσε να εφαρμοστεί και στα ασύμμετρα μεγέθη και οι βάσεις της οποίας περιελήφθησαν στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Σύμφωνα με αυτήν αν δοθούν τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα α,β,γ,δ, θα λέμε ότι αυτά αποτελούν αναλογία (δηλαδή ότι $\alpha : \beta = \gamma : \delta$), όταν το μ.α είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο ή ίσο από το ν.β και το μ.γ είναι τότε αντίστοιχα μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο από το ν.δ, ανεξάρτητα από τη τάξη του πολλαπλασιασμού. Με τη νέα αυτή προσέγγιση η θεωρία των αναλογιών διευρύνεται περιλαμβάνοντας εκτός από τις ισότητες και τις ανισότητες, υποστηρίζοντας ότι και μέσω αυτών μπορεί να διαπιστωθεί αν δυο μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο. Είναι φανερό ότι περιλαμβάνει και τα ασύμμετρα μεγέθη, διότι κάθε ασύμμετρο μέγεθος συνδέεται με μια σχέση ανισότητας με ένα σύμμετρο μέγεθος. Έτσι επεκτείνεται η έννοια του λόγου και στα ασύμμετρα μεγέθη. Όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί θαύμασαν και επαίνεσαν τη θεωρία αναλογιών του Ευδόξου.

Ο Εύδοξος δέχθηκε επίσης το αξίωμα της ύπαρξης της τετάρτης αναλόγου δ μεταξύ τριών δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α, β, γ , ακόμα και στη περίπτωση που αυτό το τμήμα δεν μπορεί να κατασκευαστεί με το κανόνα και το διαβήτη και ασχολήθηκε και με το πρόβλημα της χρυσής τομής που πρότεινε ο Πλάτωνας, τη διαίρεση δηλαδή ενός ευθύγραμμου τμήματος «σε μέσο και άκρο λόγο», έτσι ώστε το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης να είναι μέσο ανάλογο του όλου και του μικρότερου.

Μια άλλη ανακάλυψη του Ευδόξου είναι αυτή που ονομάστηκε από τους μεταγενεστέρους «μέθοδος της εξαντλήσεως», που μοιάζει με τη μέθοδο του Αντιφώντα στη λύση του Δηλίου προβλήματος, αλλά στη πραγματικότητα δεν «εξαντλεί» το χώρο όπως εκείνος υπέθεσε, αλλά στηρίζεται στην αρχή ότι με διαδοχική διαίρεση μπορούμε να φτάσουμε σε ένα μέγεθος όσο μικρό θέλουμε. Χρησιμοποιώντας έτσι μια σειρά φθινουσών και συγκλινουσών ανισωτικών σχέσεων, μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο θέλουμε ένα μέγεθος. Η λογική βάση της μεθόδου είναι ότι για δύο οποιαδήποτε μεγέθη α και β , το α θα μεγαλύτερο ή μικρότερο ή ίσο με το β . Αν λοιπόν δείξουμε ότι το α δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το β , θα είναι αναγκαστικά ίσο με αυτό. Τη μέθοδο αυτή του Ευδόξου χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης. Ο απειροστικός επίσης λογισμός του Λάιμνιτς στηρίχθηκε σε αυτές τις αρχές.

Ο Εύδοξος ανακάλυψε επίσης ότι ο όγκος ενός κώνου και μιας πυραμίδας είναι ίσος με το ένα τρίτο αντίστοιχα του όγκου του κυλίνδρου και του πρίσματος που έχουν ίδια βάση και ύψος με αυτά. Αναφέρεται ακόμα ότι πρόσθεσε τρεις ακόμα αναλογίες στις τρεις γνωστές των Πυθαγορείων και ασχολήθηκε και με τις τομές, στις οποίες εφάρμοσε την αναλυτική μέθοδο. Αναφέρεται επίσης ότι έλυσε το Δήλιο Πρόβλημα με καμπύλες και ότι μελέτησε την ιπποπέδη, ένα είδος σπειροειδούς γραμμής.

Ο Αρχύτας

Ένας από τους σημαντικούς συνεργάτες του Πλάτωνα ήταν ο Πυθαγόρειος φιλόσοφος και μαθηματικός Αρχύτας (430-360π.χ), τον οποίο γνώρισε ο Πλάτωνας στο πρώτο ταξίδι του στη Μεγάλη Ελλάδα. Παρακινούμενος από τον Πλάτωνα ο Αρχύτας ασχολήθηκε με το Δήλιο Πρόβλημα και έδωσε μια λύση που στηρίζεται στην εύρεση των δύο μέσων αναλόγων του Ιπποκράτη του Χίου. Οι μέσοι αυτοί ανάλογοι βρίσκονται με μια μηχανική κατασκευή και τα άκρα τους καθορίζονται από τα σημεία στα οποία τέμνονται στο χώρο οι κινούμενες επιφάνειες εκ περιστροφής ενός κώνου, ενός ημικυλίνδρου κι ενός σπειροειδούς δακτυλίου. Με την εργασία αυτή του Αρχύτα όπως και με αυτή του Ιππία του Ηλείου προχώρησε η μαθηματική έρευνα στη μελέτη προβλημάτων που δεν μπορούν να επιλυθούν με το κανόνα και το διαβήτη και ανοίχθηκε έτσι ο δρόμος προς τη μελέτη των κωνικών τομών και τη περαιτέρω ανάπτυξη της στερεομετρίας. Ο Αρχύτας, σα γνήσιος Πυθαγόρειος, μελέτησε επίσης τα διαστήματα του τετράχορδου, εκφράζοντας τη σχέση τους με αναλογίες και διακρίνοντας τρία είδη συμφωνιών: τη διατονική, τη χρωματική και την εναρμόνια. Σύμφωνα με το Διογένη το Λαέρτιο ήταν ο πρώτος μαθηματικός που μελέτησε τα μηχανικά προβλήματα με βάση τα μαθηματικά και παρέστησε με γεωμετρικά διαγράμματα τις μηχανικές κινήσεις. Θεωρείται σαν ο πατέρας της μηχανικής.

Ο Αριστοτέλης

Ο Αριστοτέλης σαν τον Πλάτωνα, παρόλο που ήταν βαθύς γνώστης των μαθηματικών επιστημών της εποχής του και μπορούσε να επινοεί και δικές του αποδείξεις διαφόρων θεωρημάτων, δεν ασχολήθηκε προσωπικά με τη μαθηματική έρευνα, διότι θεωρούσε και αυτός τα μαθηματικά σα κατώτερα από τη φιλοσοφία. Όπως ο Πλάτωνας στην Ακαδημία, έτσι και αυτός στο Λύκειο καθόριζε τη γενική κατεύθυνση των μαθηματικών ερευνών με τις οποίες ασχολούνταν βασικά οι μαθητές του.

Μελετώντας τον ευρύτερο ορισμό της αναλογίας του Ευδόξου ο Αριστοτέλης μπόρεσε να διακρίνει ότι αυτός προϋποθέτει τη δυνατότητα να θεωρηθεί και ο αριθμός σαν ασύμμετρος. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες μιλούσαν για ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα ή «άλογες γραμμές» και δεν είχαν προχωρήσει και στη παραδοχή των ασυμμέτρων αριθμών, όχι βέβαια γιατί δεν μπορούσαν να τους επινοήσουν, αλλά διότι ήθελαν να μείνουν πιστοί στην οντολογική τους θεώρηση γι’ αυτούς. Ο Αριστοτέλης όμως παρατηρεί ότι η διατύπωση της αριθμητικής σχέσης του «υπερέχοντος» προς το «υπερεχόμενο» προϋποθέτει τη μεταβολή του ορισμού του αριθμού, ώστε να περιλαμβάνονται σε αυτόν και ασύμμετροι αριθμοί. Πολλοί ερευνητές όμως δε θέλησαν να παραδεχθούν τη τολμηρή αυτή σκέψη του και πρότειναν τη διόρθωση του κειμένου στο οποίο αυτή αναφέρεται καθαρά, έτσι ώστε να βγαίνει άλλο νόημα από αυτό. Ο Αριστοτέλης όμως φαίνεται να είχε διαισθανθεί την ανάγκη μεταβολής της έννοιας του αριθμού ώστε να περιλαμβάνει και τη δυνατότητα των ασυμμέτρων αριθμών.

Ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε διεξοδικά με τις έννοιες του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού εκφράζοντας στα «Φυσικά» την άποψη ότι «προσθέτοντας διαρκώς σε ένα πεπερασμένο μέγεθος, μπορώ να φτάσω σε ένα μέγεθος που να υπερβαίνει κάθε δοθέν όριο και παρόμοια με διαρκή αφαίρεση μπορώ να φτάσω σε ένα μέγεθος το οποίο είναι μικρότερο από κάθε ορισμένο όριο». Αντιλαμβανόταν το άπειρο όχι σα μια μόνιμη κατάσταση, αλλά σαν την ίδια την αύξηση και καταπολέμησε τη θεωρία περί «ατόμων γραμμών» του Ξενοκράτη, ο οποίος αμφισβητούσε τη δυνατότητα της συνεχούς επ’ άπειρον διαίρεσης των μεγεθών. Σημαντικός είναι και ο ορισμός του για το συνεχές σαν την «ιδιότητα δύο συνεχόμενων μερών να έχουν το ίδιο πέρας». Τα συνεχή ποσά δεν τα θεωρεί σα στατικά οντότητες, αλλά σε συνεχή ροή, όπως το χρόνο, η συνέχεια του οποίου εξασφαλίζεται με τη διαρκή κίνηση του «τώρα». Σύμφωνα με το Γερμανό μαθηματικό Κάντορ οι ορισμοί του για το άπειρο πρέπει να περιλαμβάνονται σε οποιαδήποτε εισαγωγή στον απειροστικό λογισμό.

Η μαθηματική ιδιοφυία του φαίνεται και στη θεμελίωση της «Λογικής» του πάνω στους γνωστού νόμους-αξιώματα της Ταυτότητας, της Αντιφάσεως, της Αποκλίσεως του Τρίτου και του Αποχρώντος Λόγου. Στα «Αναλυτικά Ύστερά» του υποστηρίζει την άποψη ότι μια σχέση έχει καθολική ισχύ όταν μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει για τη πρώτη τυχαία περίπτωση στην οποία αυτή αναφέρεται, δίνοντας έτσι τη βάση για τη μέθοδο της τελείας επαγωγής.

Ασχολήθηκε επίσης με τη μεθοδολογική συγκρότηση των μαθηματικών επιστημών αναλύοντας όλα τα στοιχεία της μαθηματικής απόδειξης. Διέκρινε τι είναι αξίωμα και τι αίτημα και καθόρισε ότι αυτά διαφέρουν από την αποδεικτέα πρόταση. Έδειξε επίσης το τρόπο με τον οποίο προχωρεί η μαθηματική απόδειξη, ξεκινώντας από γενικότερες και απλούστερες προτάσεις και φθάνοντας σε ειδικότερες και πολυπλοκότερες. Θεωρούσε τα μαθηματικά σαν πρότυπο των αποδεικτικών επιστημών.

Τέλος πολέμησε τους «ειδητικούς αριθμούς» του Πλάτωνα, φοβούμενος ότι θα συγχέονταν έτσι τα όρια της φιλοσοφικής και επιστημονικής έρευνας και θα μολύνονταν τα μαθηματικά με αυθαίρετες φιλοσοφικές θεωρίες.

ΑΛΛΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Ο μαθητής του Πλάτωνα **Μέναιχμος** ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές, δηλαδή τις τομές κώνου υπό επιπέδου. Οι τομές αυτές ήταν οι κάθετες τομές που φέρονταν πάνω σε μια από τις γενέτειρες ενός ορθογωνίου, αμβλυγωνίου ή οξυγωνίου κώνου που παραγόταν από την περιστροφή αντίστοιχα ενός ορθογωνίου, αμβλυγωνίου ή οξυγωνίου τριγώνου γύρω από μία κορυφή του. Η τομή αυτή ήταν αντίστοιχα παραβολή, υπερβολή και έλλειψη. Ο Μέναιχμος χρησιμοποίησε τα συμπεράσματα των μελετών του πάνω στις κωνικές τομές για να λύσει με δύο τρόπους το Δήλιο πρόβλημα. Στο πρώτο τρόπο η λύση βρισκόταν με τη τομή υπερβολής και παραβολής και στο δεύτερο με τη τομή δύο παραβολών. Με τη τομή αυτών των καμπυλών

κατορθώνεται να βρεθούν οι δυο μέσοι ανάλογοι του Ιπποκράτη του Χίου. Και στις δυο αυτές λύσεις χρησιμοποιεί την ανάλυση και τη σύνθεση και φαίνεται από αυτές ότι γνώριζε τη κατασκευή μιας παραβολής από ένα δοθέντα άξονα και μια δοθείσα παράμετρο, καθώς και την εξίσωσή της $\psi^2 = 2\rho\chi$. Στην υπερβολή χρησιμοποίησε την εξίσωση των ασυμπτώτων της: $\chi\cdot\psi = \alpha\beta$. Από τα διαγράμματά του φαίνεται ότι γνώριζε να χρησιμοποιεί και το σύστημα των συντεταγμένων. Πολλές από τις ανακαλύψεις του χρησιμοποιήθηκαν αργότερα από τον Απολλώνιο.

Ο αδελφός του Μέναιχμου **Δεινόστρατος** έλυσε το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με τη βοήθεια της τετραγωνίζουσας του Ιππία. Άλλοι αναφερόμενοι μαθηματικοί μαθητές του Πλάτωνα είναι ο **Φίλιππος ο Οπούντιος**, ο **Λεωδάμας** από τη Θάσο, ο **Λέων ο Βυζάντιος** που εισήγαγε τη διερεύνηση ενός προβλήματος ο **Θεύδιος** από τη Μαγνησία, ο **Ερμότιμος ο Κολοφώνιος** που ανακάλυψε πολλές θεμελιώδεις προτάσεις και ο Πυθαγόρειος **Θυμαρίδα** που όρισε τη μονάδα σαν «περαίνουσα ποσότητα» και στον οποίο αποδίδεται το λεγόμενο «*Θυμαρίδειο επάνθημα*» από το οποίο μαθαίνουμε ότι οι Πυθαγόρειοι μπορούσαν να εξετάζουν εξισώσεις με n αγνώστους.

Μαθητής του Αριστοτέλη ήταν ο **Εύδημος ο Ρόδιος** (350-290π.χ.) που έγραψε ιστορικές πραγματείες για την αριθμητική, τη γεωμετρία και την αστρονομία, από τις οποίες προέρχονται οι περισσότερες πληροφορίες μας. Ασχολήθηκε επίσης με γεωμετρικά προβλήματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ Ή ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (323-30Π.Χ.)

Η περίοδος αυτή αποτελεί το «χρυσό αιώνα» των ελληνικών μαθηματικών κατά τον οποίο άκμασαν οι τρεις μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί, Ευκλείδης, Αρχιμήδης και Απολλώνιος.

Ευκλείδης

Ο «Πλατωνικός στη διάθεση και οικείος με τη φιλοσοφία», διάσημος γεωμέτρης ή καλύτερα πατέρας της γεωμετρίας Ευκλείδης έζησε την εποχή του Πτολεμαίου. Το διασημότερο και περιλαμπρότερο έργο του, τα «*Στοιχεία*», ξεκινούν από γενικές αρχές και φτάνουν με την αποδεικτική μέθοδο σε ειδικότερες αριθμητικές και γεωμετρικές προτάσεις. Κάθε πρόταση λαμβάνεται σαν αληθής μόνον όταν παράγεται από τις γενικές αρχές μέσα από μια σειρά διαδοχικών, αποδεδειγμένων, ενδιαμέσων προτάσεων. Ολόκληρο έτσι το σύστημα στηρίζεται στις θεμελιώδεις αρχές, τις οποίες ο Ευκλείδης διακρίνει σε «όρους», «αιτήματα» και «κοινές έννοιες». Οι «όροι» ή ορισμοί δίνουν τις σημασίες των χρησιμοποιούμενων γεωμετρικών εννοιών (σημείο, γραμμή, επιφάνεια κ.λ.π.) και είναι ακριβείς, σαφείς και σύντομοι. Ακολουθούν τα πέντε αιτήματα, με τελευταίο το περίφημο αίτημα των παραλλήλων ευθειών, η αμφισβήτηση του οποίου οδήγησε στις νεότερες μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Μετά τα αιτήματα έχουμε τις λεγόμενες «κοινές έννοιες» ή αξιώματα, στοιχειώδεις προτάσεις που δεν μπορούμε να αποδείξουμε, αλλά που όλοι δεχόμαστε άμεσα σαν «αληθείς», όπως το ότι δύο πράγματα που είναι ίσα με ένα τρίτο πράγμα είναι και μεταξύ τους ίσα ή ότι το μέρος είναι μικρότερο από το όλο. Οι τελευταίες αυτές προτάσεις μας βοηθούν να εργαστούμε με τις ιδότητες και τις ανισώσεις. Τελικά με βάση τους όρους, τα αιτήματα και τις κοινές αρχές προχωράμε στην απόδειξη των θεωρημάτων και στη λύση των προβλημάτων.

Στην αρχή καθενός από τα 13 (ή 15 με τις δυο μεταγενέστερες προσαρτήσεις τους) βιβλίου των «*Στοιχείων*» προστίθενται οι νέοι «όροι» που είναι απαραίτητοι για την προχώρηση της έρευνας. Οι νέοι αυτοί όροι διατυπώνονται μόνον εφόσον είναι δυνατόν να κατανοηθούν με βάση τους προηγούμενους. Με αυτό το τρόπο δομείται ένα ισχυρό, αρραγές, ενιαίο σύστημα που δεν

παρουσιάζει καμία ρωγή. Γι' αυτό και θεωρήθηκαν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη σαν πρότυπα επιστημονικής θεμελίωσης, συστηματικότητας και αποδεικτικής διαδικασίας κι επηρέασαν όχι μόνο τη μαθηματική σκέψη, αλλά και το φιλοσοφικό στοχασμό και όλη γενικά την επιστημονική διανόηση. Θα πρέπει να επισημανθεί πάντως ότι αυτά δεν ασχολούνται μόνο με τη γεωμετρία. Τα βιβλία 7^ο -10^ο περιλαμβάνουν μια ολοκληρωμένη μαθηματική θεωρία, ενώ το 2^ο βιβλίο μας δίνει μια γεωμετρική άλγεβρα και το 5^ο τη γενικευμένη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου.

Με τα «Στοιχεία» του ο Ευκλείδης δημιούργησε μια επιστημονική μάθηση που διατήρησε αναλλοίωτη την ισχύ της, διδασκόμενη μέχρι σήμερα σε όλα τα σχολεία του πολιτισμένου κόσμου, αποδεικνύοντας περίτρανα την ισχύ του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Είναι το δεύτερο κατά σειρά βιβλίο σε αριθμό εκδόσεων μετά από τη Βίβλο.

Εκτός από τα «Στοιχεία», Ο Ευκλείδης έγραψε και πολλά άλλα μαθηματικά έργα. Ο Πρόκλος αναφέρει τα «Οπτικά», «Κατοπτρικά», «Τας Κατά Μουσικήν Στοιχειώσεις» κι ένα βιβλίο «Περί Διαιρέσεων». Αναφέρονται και άλλα έργα του από τα οποία άλλα χάθηκαν και άλλα διασώθηκαν στα Αραβικά.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Ο Συρακούσιος Αρχιμήδης (277-212 π.χ.) είναι ο δεύτερος σε χρονολογική σειρά μεγάλος μαθηματικός της Αλεξανδρινής περιόδου. Αυτός τελειοποίησε τη «μέθοδο εξαντλήσεως» του Ευδόξου και τη χρησιμοποίησε για να υπολογίσει το εμβαδόν διαφόρων καμπυλογράμμων σχημάτων, αρχίζοντας από τον κύκλο. Η μεθόδός του είναι πολύ ανάλογη με την ολοκλήρωση που χρησιμοποιούν σήμερα οι μαθηματικοί. Ενέγραψε και περιέγραψε σε ένα κύκλο ακτίνας a ένα κανονικό 96γωνο και απέδειξε ότι το εμβαδόν του είναι προσεγγιστικά μεταξύ του $(3 + 10/71)a^2$ και του $(3 + 1/7)a^2$. Δηλαδή βρήκε ότι η τιμή του π , του λόγου της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρό του, είναι μεταξύ του $3 + 1/71$ και του $3 + 1/7$. Την ίδια μέθοδο εφάρμοσε και σε στερεά σώματα εκ περιστροφής χρησιμοποιώντας ένα εγγεγραμμένο κι ένα περιγεγραμμένο κύλινδρο για να προσεγγίσει τον όγκο τους.

Εκτός από αυτή τη μέθοδο, χρησιμοποίησε και μια «μηχανική» μέθοδο με την οποία καθόριζε το λόγο των επιφανειών δύο σωμάτων από το λόγο των βαρών που χρησιμοποιούνται για την ισορροπία τους σε ένα ιδανικό ζυγό, θεωρώντας τα επίπεδα σχήματα σαν όμοια με ομογενή σταθμητά σώματα. Τη μέθοδο αυτή χρησιμοποίησε στο έργο του «Τετραγωνισμός της Παραβολής», αλλά δεν της έδινε αποδεικτική αξία. Τη θεωρούσε μόνο σαν ένα όργανο έρευνας που βοηθούσε στο να καταστούν φανερές ορισμένες σχέσεις, τις οποίες έπρεπε να αποδείξει μετά η γεωμετρία. Με τη χρησιμοποίηση αυτής της μεθόδου οδηγήθηκε στην ανακάλυψη των αρχών της μηχανικής, ενώ οι έρευνές του για το κέντρο βάρους τον οδήγησαν στην ανακάλυψη των θεμελιωδών αρχών της υδροστατικής. Μελετώντας επίσης τις ιδιότητες των μοχλών, έκανε εκπληκτικές ανακαλύψεις στο τομέα της μηχανικής και ιδίως της βλητικής.

Ο Αρχιμήδης απέδειξε πάρα πολλές σπουδαίες γεωμετρικές προτάσεις. Ο ίδιος θεωρούσε σα σπουδαιότερη ανακάλυψή του την απόδειξη ότι ο κύλινδρος που έχει βάση μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος τη διάμετρό της έχει επιφάνεια και όγκο τα $3/2$ της επιφάνειας αντίστοιχα και του όγκου αυτής της σφαίρας. Απέδειξε επίσης θεωρήματα για την επιφάνεια της σφαίρας, του σφαιρικού τμήματος και του σφαιρικού τομέα. Για το κύκλο απέδειξε ακόμα ότι κάθε κύκλος είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο με μια κάθετη πλευρά την ακτίνα του και την άλλη ίση με τη περιφέρεια του κύκλου και ότι λόγος του εμβαδού κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του είναι ίσος (κατά προσέγγιση) με 11:14. Απέδειξε επίσης πολλές σημαντικές προτάσεις για τη μέτρηση στερών εκ περιστροφής. Πολλές προτάσεις του αφορούν επίσης τη περίφημη έλικά του (έλικα του Αρχιμήδη).

Στο έργο του «Ψαμμίτης» παρουσιάζει ένα καινούργιο αριθμητικό σύστημα με βάση το οποίο μπορούν να γραφούν πολύ μεγάλοι αριθμοί. Διατύπωσε και πολλά προβλήματα, όπως το «βοεικό

πρόβλημα» που πρότεινε για λύση στους μαθηματικούς της Αλεξανδρείας.

ΑΛΛΟΙ ΣΥΓΧΡΟΝΟΙ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ο **Κόνων** έγραψε ένα αστρονομικό έργο από επτά βιβλία που περιλαμβάνει παρατηρήσεις των Χαλδαίων σχετικά με τις εκλείψεις. Σε αυτές στήριξε αργότερα ο Ίππαρχος τις αστρονομικές εργασίες του. Ασχολήθηκε με κωνικές τομές όπως και ο Απολλώνιος. Ο **Ερατοσθένης** (276-195π.χ.) ασχολήθηκε με φιλολογικές, μαθηματικές, γεωγραφικές και χρονολογικές σπουδές και έγραψε πολλά έργα. Τα «*Γεωγραφικά*» του πραγματεύονταν την ιστορία της γεωγραφίας, τη σφαιρικότητα της γης, τη χωρογραφία και την εθνογραφία. Με αστρονομικές παρατηρήσεις υπολόγισε το μήκος της περιμέτρου της γης σε 252.000 στάδια. Έγραψε δύο βιβλία «*Περί Μεσοτήτων*» και έδωσε μια δικιά του λύση στο Δήλιο πρόβλημα. Είναι πολύ γνωστός για το περίφημο «κόσκινο του Ερατοσθένη» που χρησιμοποιείται για την εύρεση των πρώτων αριθμών.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος είναι ο τρίτος κατά σειρά από τους μεγάλους μαθηματικούς της Αλεξανδρινής περιόδου. Έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του Ευεγέρτου (247-222π.χ.) και έγραψε πολλά σπουδαία έργα, τα περισσότερα των οποίων χάθηκαν. Αναφέρονται τα εξής έργα του:

- «*Λόγου Αποτομή*» που περιλαμβάνει τη κατασκευή μιας διατέμνουσας δύο ευθειών από ένα σημείο εκτός αυτών έτσι ώστε τα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία τομής και από ένα δοθέν σημείο σε κάθε μία απο αυτές τις ευθείες να έχουν μεταξύ τους δοθέντα λόγο.
- «*Χωρίου Αποτομή*» που παρουσιάζει ένα πρόβλημα παρόμοιο με το προηγούμενο, μόνο που τώρα τα πάνω στις ευθείες λαμβανόμενα διά των τομών τμήματα πρέπει να περικλείουν δοθείσα επιφάνεια.
- «*Διωρισμένη Τομή*». Δοθέντων τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Δ επί μια ευθείας, να βρεθεί σημείο Ε έτσι ώστε τα τμήματα $ΑΓ : ΓΕ = ΒΕ : ΔΕ$
- «*Επαφαί*». Δοθέντων οποιωνδήποτε τριών σημείων, ευθειών ή κύκλων να αχθεί κύκλος που να διέρχεται από τα δοθέντα σημεία ή να εφάπτεται καθεμιάς από τις δοθείσες ευθείες.
- «*Νεύσεις*». Να παρεμβληθεί μεταξύ δύο δοθισών ευθειών τμήμα γνωστού μήκους που να διέρχεται από ορισμένο σημείο. Το έργο αυτό περιελάμβανε 125 θεωρήματα και 38 λήμματα.
- «*Επίπεδοι Τόποι*».
- «*Περί Κοχλίου*», για την ελικοειδή γραμμή που γράφεται γύρω από ένα κύλινδρο.
- «*Περί συγκρίσεως του Δωδεκαέδρου και του Εικοσαέδρου*» εγγεγραμμένων στην ίδια σφαίρα. Αποδεικνύεται ότι ο λόγος των επιφανειών τους είναι ίδιος με το λόγο των όγκων τους.
- «*Περί Ατάκτων Αλόγων*». Περί πιο σύνθετων μορφών ασύμμετρων μεγεθών από αυτά με τα οποία είχε ασχοληθεί ο Θεαίτητος..
- «*Ωκυτόκιο*», δηλαδή μέθοδος συντομεύσεως των λογιστικών πράξεων. Σε αυτό το έργο ο Απολλώνιος παρουσίασε, όπως και ο Αρχιμήδης, ένα ιδιαίτερο αριθμητικό σύστημα. Στο ίδιο έργο προσδιόρισε την αριθμητική τιμή του π ακριβέστερα από τον Αρχιμήδη με μια διαφορετική μέθοδο από αυτόν.
- «*Η Καθόλου Πραγματεία*» εξετάζει γενικά τη θεμελίωση της γεωμετρίας και το τρόπο με τον οποίο αποκτάμε τη γνώση των πρώτων γεωμετρικών εννοιών. Επεχείρησε να αποδείξει σε αυτή και μερικά γεωμετρικά αξιώματα με βάση τις ιδιότητες του χώρου.
- «Περί του Πυρίου». Περί παραβολικών κατόπτρων που μπορούν να προκαλέσουν ανάφλεξη.
- Ένα αστρονομικό έργο του οποίου δε διασώθηκε ο τίτλος, στο οποίο εξηγούνται μερικές ανωμαλίες στη κίνηση του ήλιου σε σχέση με τα ζώδια με βάση τη θεωρία των επικύκλων.

Ασχολήθηκε επίσης με τον υπολογισμό της αποστάσεως της σελήνης από τη γη, την οποία υπολόγισε σε πεντακόσιες μυριάδες στάδια.

- «Κωνικά» σε οκτώ βιβλία, που είναι και το κύριο έργο του, το οποίο και τον έκανε αθάνατο. Απ' αυτό σώθηκαν στα ελληνικά τα τέσσερα πρώτα βιβλία και τα τρία επόμενα στα Αραβικά, ενώ το 8^ο χάθηκε.

Σύμφωνα με τον ίδιο τον Απολλώνιο τα τέσσερα πρώτα βιβλία περιλαμβάνουν την εισαγωγή στα στοιχεία και από αυτά το πρώτο τους τρόπους με τους οποίους γεννώνται οι τρεις κωνικές τομές (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή) και τις θεμελιώδεις ιδιότητές τους. Το δεύτερο αναφέρεται στις ιδιότητες των διαμέτρων και των αξόνων των κωνικών τομών καθώς και των ασυμπτώτων της υπερβολής. Το τρίτο βιβλίο περιέχει «πολλά θεωρήματα άξια να δημιουργήσουν απορίες τα οποία είναι χρήσιμα για τις κατασκευές των στερεών τόπων και για τις διερευνήσεις τους». Το τέταρτο περιέχει «τους τρόπους που τέμνονται οι κωνικές τομές μεταξύ τους και με τη περιφέρεια του κύκλου και πολλά άλλα». Από τα υπόλοιπα βιβλία που είναι «πιο πλούσια σε περιεχόμενο» το πέμπτο εξετάζει τα μέγιστα και τα ελάχιστα ευθύγραμμα τμήματα που μπορούν να αχθούν από ένα σημείο προς μια κωνική τομή. Το έκτο ασχολείται με τις τομές ίσων και ομοίων κώνων και το έβδομο με τα θεωρήματα τα σχετικά με τις διερευνήσεις. Τέλος το όγδοο εξετάζει «προσδιορισμένα κωνικά προβλήματα»

Πρώτος ο Απολλόδωρος έδωσε τις σημερινές ονομασίες στις κωνικές τομές, οι οποίες ονομάζονταν πριν απ' αυτόν αντίστοιχα τομή ορθογωνίου, αμβλυγωνίου και οξυγωνίου κώνου, από τους οποίους εθεωρούντο ότι παράγονταν. Πρώτος επίσης αυτός έθεσε σε μια νέα, πιο γενικευμένη βάση το πρόβλημα της γενέσεως μιας κωνικής επιφάνειας από μια γενέτειρα και της παραγωγής του κώνου. Με αυτό το τρόπο και οι τρεις κωνικές τομές ορίζονται στον ίδιο κώνο, αλλάζοντας απλώς το προσανατολισμό (κλίση) του επιπέδου τομής.

Από τη μελέτη των επτά διασωθέντων βιβλίων του προκύπτει ότι ο Απολλώνιος γνώριζε, πολύ πριν τον Καρτέσιο, το σύστημα των συντεταγμένων και διέκρινε τις τετμημένες από τις τεταγμένες, λαμβάνοντας τις τετμημένες πάνω στον άξονα των κωνικών τομών. Είχε μελετήσει επίσης το περίφημο πρόβλημα του καθορισμού του γεωμετρικού τόπου ενός σημείου το οποίο κινείται έτσι ώστε το γινόμενο των αποστάσεών του από ένα ορισμένο αριθμό γραμμών προς το γινόμενο των αποστάσεών του από έναν άλλο αριθμό γραμμών να διατηρεί ένα σταθερό λόγο. Ασχολούμενος με τη γενικότερη λύση αυτού του προβλήματος ο Καρτέσιος ανακάλυψε την αναλυτική γεωμετρία.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ 2^Ο Π.Χ. ΑΙΩΝΑ

Σύγχρονος του Απολλωνίου ήταν ο **Νικομήδης** που ανακάλυψε τη περίφημη *κογχοειδή* καμπύλη με την οποία έλυσε το Δήλιο Πρόβλημα και τη τριχοτόμηση μιας γωνίας. Από το τρόπο εργασίας του φαίνεται ότι μπορούσε να λύνει κυβικές εξισώσεις χωρίς να χρησιμοποιεί κωνικές τομές. Ο Νεύτωνας θεώρησε την κογχοειδή του σαν το «άριστο μέσο που επινόησε η αρχαιότητα για τη λύση του Δηλίου προβλήματος».

Στα τέλη του 2^{ου} π.χ. αιώνα έζησε και ο **Διοκλής** που έλυσε το Δήλιο Πρόβλημα με τη *κισσοειδή* καμπύλη. Αναφέρεται και βιβλίο του «*Περί Πυρίων*» όπου εξέταζε κάτοπτρα με παραβολικές και ελλειψοειδείς επιφάνειες. Στο ίδιο βιβλίο έλυνε το πρόβλημα της διαίρεσης μιας σφαίρας σε δυο μέρη που να έχουν δοθέντα λόγο, το οποίο είχε θέσει ο Αρχιμήδης.

Στα μέσα του 2^{ου} π.χ. αιώνα ο **Ζηνόδορος** έγραψε ένα έργο «*Περί Ισομέτρων Σχημάτων*» όπου αποδείκνυε ότι μεταξύ των κανονικών πολυγώνων με την ίδια περίμετρο μεγαλύτερο εμβαδόν έχουν εκείνα των οποίων ο αριθμός των πλευρών είναι μεγαλύτερος και ότι ο κύκλος που έχει ίση περίμετρο με αυτά τα πολύγωνα, έχει το μεγαλύτερο σε σύγκριση με αυτά εμβαδόν.

Τον ίδιο αιώνα έζησε και **Περσέας** που ασχολήθηκε με τις *σπειρικές γραμμές*, δηλαδή εκείνες που

παράγονται από τη τομή σπείρας υπό επιπέδου.

Επίσης ο Πόντιος **Διονυσόδωρος** έλυσε με παραβολή και υπερβολή το πρόβλημα της τομής της σφαίρας υπό επιπέδου σε μέρη ανάλογα, που έθεσε ο Αρχιμήδης και ο **Υψικλής** έγραψε το δέκατο τέταρτο, προσαρτημένο, βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη που πραγματεύεται τη διατυπωθείσα από τον Απολλώνιο πρόταση ότι «οι όγκοι του στην αυτή σφαίρα εγγεγραμμένου δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν οι επιφάνειές τους». Ασχολήθηκε και με αριθμητικά προβλήματα.

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κατά το δεύτερο αιώνα π.χ. έγιναν και οι πρώτες σοβαρές προσπάθειες για τη θεμελίωση της τριγωνομετρίας. Ήδη κατά τον τρίτο αιώνα ο μεγάλος αστρονόμος **Αρίσταρχος ο Σάμιος** (310-230 π.χ.), που είχε προηγηθεί από τον Κοπέρνικο στην ανακάλυψη του ηλιοκεντρικού συστήματος, είχε προσπαθήσει να μετρήσει την απόσταση της γης από τη σελήνη και τον ήλιο με τριγωνομετρικό υπολογισμό («*Περί Μεγεθών και Αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης*»). Λόγω ενός σφάλματος των 3° στη μέτρηση της οξείας γωνίας του ορθογωνίου τριγώνου που χρησιμοποίησε βρήκε την απόσταση του ήλιου από τη γη 20 φορές μικρότερη από τη πραγματική. Σε αυτό τον υπολογισμό του δε χρησιμοποιούσε βέβαια ημίτονα και συνημίτονα, τα οποία επινοήθηκαν αρκετά αργότερα, αλλά τις χορδές των τόξων, οι οποίες όμως συνδέονται, όπως ξέρουμε, τριγωνομετρικά με τις γωνίες.

Σαν πατέρας πάντως της τριγωνομετρίας και αυτός που χρησιμοποίησε συνειδητά τους τριγωνομετρικούς υπολογισμούς μπορεί να θεωρηθεί ο **Ίππαρχος** (190-120π.χ), ο οποίος έγραψε 12 βιβλία για τον υπολογισμό των χορδών κύκλου με βάση τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά στο έργο του «*Περί της Πραγματείας των εν Κύκλω Ευθειών*». Ήταν επίσης ο πρώτος που χρησιμοποίησε τις συντεταγμένες των αστερών ορίζοντας τη θέση τους με το εκλειπτικό μήκος και πλάτος τους. Αναφέρεται ότι μπορούσε να επιλύει σφαιρικά τρίγωνα αν ήσαν γνωστά τρία στοιχεία τους από τα οποία το ένα τουλάχιστον πλευρά. Του αποδίδεται επίσης η διαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες και η επινόηση του αστρολάβου.

Από τη μεριά του ο **Θεοδόσιος** από τη Βιθυνία έγραψε τα «*Τα Σφαιρικά*» που περιέχουν μια σύντομη σφαιρική γεωμετρία και εξετάζουν τα σχήματα που μπορούν να γραφούν πάνω στην επιφάνεια σφαίρας. Στο έργο του «*Περί Οικήσεων*» ασχολείται με τις διάφορες ζώνες της γης και τους αστέρες που είναι ορατοί από αυτές.

Κατά τον 1^ο π.χ. αιώνα η μαθηματική έρευνα παρουσιάζουν μια εμφανή κάμψη. Ο **Ποσειδώνιος** χρησιμοποίησε το μαθηματικό υπολογισμό για την επίλυση αστρονομικών και γεωγραφικών προβλημάτων. Από την επίδρασή του ο **Στράβων** έδωσε αστρονομική και μαθηματική βάση στο γεωγραφικό του σύστημα. Ο μαθητής του Ποσειδωνίου **Γεμίνος ο Ρόδιος** ασχολήθηκε με τη γεωμετρία και την αστρονομία και έγραψε το «*Περί της των Μαθημάτων Τάξεως*» από το οποίο άντλησε πολλές ιστορικές πληροφορίες ο Πρόκλος. Σύγχρονος του ήταν ο αστρονόμος **Κλεομήδης** του οποίου διεσώθη βιβλίο «*Περί Κυκλικής Θεωρίας Μετεώρων*», ο οποίος σα μαθηματικός υπεράσπισε τη μαθηματική επιστήμη από τις επικρίσεις των Επικουρείων.

ΠΕΜΠΤΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (30π.χ.-537μ.χ.)

Ο **Μενέλαος ο Αλεξανδρεύς** διέπρεψε το δεύτερο μισό του 1^{ου} μ.χ. αιώνα σα γεωμέτρης και αστρονόμος. Τα «Σφαιρικά» του αποτελούμενα από τρία βιβλία διασώθηκαν στα Εβραϊκά και στα Αραβικά και μεταφράστηκαν αργότερα στα Λατινικά. Θεωρούνται πολύ σπουδαία διότι περιλαμβάνουν όλα όσα ανακάλυψαν οι αρχαίοι έλληνες για τη σφαιρική γεωμετρία και τη τριγωνομετρία, τα οποία και παρουσιάζονται με το συστηματικό τρόπο των «Στοιχείων του

Ευκλείδη. Στο τρίτο βιβλίο προτάσσεται το περίφημο θεώρημα. που φέρει το όνομά του. Ανάλογο θεώρημα με το όνομά του υπάρχει και στην επιπεδομετρία (Θεώρημα Μενελάου). Ο **Κάρπος** ασχολήθηκε με προβλήματα μεθοδολογικής θεμελίωσης και σύνταξης των μαθηματικών επιστημών και βρήκε μια λύση του Δηλίου προβλήματος με μια καμπύλη «εκ διπλής κινήσεως». Και ο **Σπόρος** βρήκε μια δικιά του λύση του Δηλίου Προβλήματος και απέρριψε σαν σοφιστική τη λύση του Ιππία του Ηλείου.

Ο ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ

Ο **Κλαύδιος Πτολεμαίος** είναι ο μετά τον Ίππαρχο ο μεγαλύτερος Έλληνας αστρονόμος, ο οποίος συστηματοποίησε σε ενιαίο σύστημα τις θεωρίες και την εργασία των προγενεστέρων του. Το αστρονομικό γεωκεντρικό σύστημα που φέρνει την ονομασία του διατήρησε την ισχύ του για δεκατρείς αιώνες, για να αντικατασταθεί τελικά από το ηλιοκεντρικό σύστημα του Κοπέρνικου στις αρχές του δεκάτου έκτου αιώνα. Έδρασε κατά τα μέσα του 2^{ου} μ.χ. αιώνα. Τα κυριότερα έργα του είναι τα εξής:

- *«Μαθηματική Σύνταξη»*. Το σπουδαιότερο από τα έργα του που θεωρήθηκε σα θεμελιώδες για τη μελέτη της αστρονομίας. Είχε διαιρεθεί σε 13 βιβλία σε αντιστοιχία με τα 13 βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Ονομαζόταν και «Μεγάλη Σύνταξις της Αστρονομίας» και λόγω του θαυμασμού που του αποδιδόταν και σαν «Η Μεγίστη Σύνταξις». Μεταφράστηκε στα Αραβικά αποτελώντας τη περίφημη Αλμαγέστα των Αράβων. Αργότερα μεταφράστηκε και στα Λατινικά.
- *«Υποθέσεις των Πλανωμένων ή των Ουρανίων Κύκλων Κινήσεις»*.
- *«Φάσεις Απλανών Αστέρων και Συναγωγή Επισημασιών»*. Δίνει ενδείξεις για την ανατολή και τη δύση των αστέρων και περιέχει και μια συλλογή μετεωρολογικών φαινομένων.
- *«Προχείρων Κανόνων Διάταξις και Ψηφοφορία»*. Περιέχει δεδομένα και υπολογισμούς από την Αλμαγέστα.
- *«Περί Αναλήματος»*. Περιγράφει την ορθογραφική προβολή και σχεδίαση της ουρανίου σφαίρας.
- *«Γεωγραφική Υφήγησις»*. Το κυριότερο γεωγραφικό έργο του Πτολεμαίου. Περιέχει και χάρτες.
- *«Αρμονικών Βιβλία»*.

Έγραψε και πολλά άλλα έργα από τα οποία διασώθηκαν αποσπάσματα. Σε λατινική μετάφραση από το αραβικό κείμενο διασώθηκαν τα *«Οπτικά»* και το *«Πλανισφαίριο»* του. Αναφέρεται έργο του *«Περί Ροπών»* και τρία βιβλία του αναφερόμενα στη μηχανική.

Ο Πτολεμαίος συνετέλεσε με τις έρευνές του στην ανάπτυξη της τριγωνομετρίας συνεχίζοντας το έργο του Ιπάρχου. Τα τριγωνομετρικά του θεωρήματα περιέχονται στα κεφάλαια 10-16 του πρώτου βιβλίου της Αλμαγέστας. Στο ίδιο βιβλίο δίνει και κατάλογο των τιμών των χορδών που αντιστοιχούν στις επίκεντρες γωνίες κύκλου, αρχίζοντας από τη χορδή μισής μοίρας και προχωρώντας βαθμιαία μέχρι τις 180°. Είναι κάτι ανάλογο με τους σημερινούς τριγωνομετρικούς πίνακες.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι είχε προσπαθήσει να αποδείξει το αίτημα του Ευκλείδη για τις παράλληλες ευθείες. Υπολόγισε τον αριθμό π σαν σε $3 + \frac{17}{120}$, δηλαδή σε 3,14167, ενώ έχει αφήσει στη γεωμετρία το γνωστό «θεώρημα του Πτολεμαίου» κατά το οποίο το γινόμενο των διαγωνίων ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του.

Ο ΗΡΩΝΑΣ

Ο **Ήρωνας** διέπρεψε σα μηχανικός («*Μηχανικά*», «*Βελοποιικά*», «*Χειροβαλίστρας Κατασκευή*», «*Πνευματικών Α΄ και Β΄*», και «*Περί Αυτοματοποιητικής*»). Στα Λατινικά διασώθηκαν τα «*Κατοπτρικά*» του όπου εξετάζει τα οπτικά φαινόμενα σε σχέση με τα επίπεδα, κοίλα και κυρτά κάτοπτρα. Απέδειξε σε αυτά ότι το φως κατά την ανάκλασή του ακολουθεί το συντομότερο δρόμο, ορίζοντας έτσι ένα νόμο οικονομίας για τη φύση. Το έργο του «*Διόπτρα*» περιγράφει το ομώνυμο μηχανήμα και τη κατασκευή οδομέτρου για άμαξα.

Του αποδίδονται πολλά μαθηματικά έργα, αρκετά από τα οποία όμως αμφισβητούνται και θεωρούνται σαν έργα μεταγενεστέρων του. Δικό του είναι πάντως το «*Μετρικών Α΄, Β΄, Γ΄*». Στο πρώτο βιβλίο παρουσιάζει το τρόπο υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου, τετραπλεύρου, κανονικών πολυγώνων μέχρι του δωδεκαγώνου, του κύκλου, των κυκλικών τμημάτων, της ελλείψεως, των παραβολικών τμημάτων, της επιφάνειας του κυλίνδρου, του ορθογωνίου κώνου, της σφαίρας και των τμημάτων της. Στο 2^ο βιβλίο αναφέρεται στη μέτρηση των στερεών, δηλαδή του κυλίνδρου, πρίσματος, πυραμίδας, κώνου, σφαίρας και των τμημάτων της, σπείρας και των τεσσάρων κανονικών πολυέδρων. Στο 3^ο βιβλίο το θέμα πραγματεύεται τη διαίρεση σφαίρας, πυραμίδας και κώνου και των επιφανειών σύμφωνα με δοθέντα λόγο. Παρουσιάζει επίσης ένα τρόπο εύρεσης της τρίτης ρίζας ενός μη κυβικού αριθμού όπως επίσης προσεγγίσεις για τετραγωνικές ρίζες αριθμών.

Άλλα έργα του είναι τα «*Όροι των Γεωμετρικών Ονομάτων*», «*Γεωμετρία*», «*Εισαγωγή των Στερεομετρουμένων*», «*Περί Μέτρων*», «*Μέτρησις Τετραστέγου*» και το «*Γεηπονικόν Βιβλίον*». Ασχολήθηκε και με τη λύση του Δηλίου προβλήματος. Έγραψε ακόμα και σχόλια πάνω στα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδη.

Αναφέρεται ακόμα ότι προσπάθησε να μετρήσει την απόσταση μεταξύ Ρώμης και Αλεξανδρείας χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις που αναφέρονται στη διαφορά με την οποία συμβαίνει η έκλειψη της σελήνης στις δύο αυτές πόλεις.

Η ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Όπως ο Ευκλείδης θεωρείται σαν ο πατέρας της γεωμετρίας, έτσι και ο **Νικόμαχος ο Γερασηνός** θεωρείται σαν ο πατέρας της αριθμητικής. Έδρασε κατά το 140 μ.χ. και το διασημότερο έργο του είναι η περίφημη «*Αριθμητική Εισαγωγή*» του, στο οποίο στηριζόταν μέχρι τα μέσα του 19^{ου} αιώνα η διδασκαλία της θεωρητικής αριθμητικής στη Δύση. Διασώθηκε και το έργο του «*Εγχειρίδιον Αρμονικής*». Κατέταξε, σαν τον Ευκλείδη, σε μια συστηματική σειρά όλες τις γνωστές μέχρι τότε προτάσεις συνθέτοντάς τις σε ένα ενιαίο αρμονικό σύνολο. Μια νέα δική του πρόταση που παρουσιάζει στο βιβλίο του είναι ότι υπολογισμός των κύβων των ακεραίων αριθμών με πρόσθεση διαδοχικών περιττών αριθμών: «το ένα αποτελεί το πρώτο κύβο ($1=1^3$) και οι δυο περιττοί μετά τη μονάδα ($3+5$) προστιθέμενοι αποτελούν το δεύτερο κύβο (2^3) και οι κατόπιν αυτών τρεις περιττοί ($7+9+11$) προστιθέμενοι δίνουν τον τρίτο κύβο (3^3) και οι σε συνέχεια επόμενοι τέσσερες περιττοί αριθμοί ($13+15+17+19$) δίνουν το τέταρτο κύβο (4^3) κ.λ.π.». Ο Νεοπλατωνικός Ιάμβλιχος έγραψε σχόλια στην «Αριθμητική Εισαγωγή» του Νικομάχου, στα οποία εκφράζεται πολύ εγκωμιαστικά γι' αυτόν.

Κατά τον 2^ο μ.χ. αιώνα έζησε και ο **Θέων ο Σμυρναίος**, του οποίου το διασωθέν έργο «*Θέωνος Σμυρναίου Πλατωνικού των κατά το Μαθηματικόν Χρησίων εις την Πλάτωνος Ανάγνωσιν*», δείχνει από το τίτλο ότι αποσκοπούσε να παρέχει τις απαραίτητες γνώσεις για τη μαθηματική κατανόηση των πλατωνικών έργων. Δεν περιορίζεται όμως σε αυτό, αλλά δίνει όλες τις σχετικές με την αριθμητική, γεωμετρία και αστρονομία θεμελιώδεις μαθηματικές γνώσεις.

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕ ΤΟ ΔΙΟΦΑΝΤΟ

Έχουμε μιλήσει για τη διάκριση που έκαναν οι αρχαίοι μεταξύ της «καθαρής» ή «φιλοσοφικής» αριθμητικής και της «πρακτικής» αριθμητικής ή λογιστικής, την οποία θεωρούσαν κατώτερη από τη πρώτη. Στοιχεία λογιστικής διδάσκονταν στα σχολεία και υπήρχαν πολλά σχετικά έργα που χάθηκαν. Λογιστικής φύσης ήταν και το βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη. Όταν η μαθηματική έρευνα άρχισε να στρέφεται στα εφαρμοσμένα μαθηματικά ήταν φυσικό οι ερευνητές να στραφούν στη λογιστική.

Τις αρχικές βάσεις για τον αλγεβρικό συμβολισμό τις είχε δώσει ο Αριστοτέλης που πρώτος χρησιμοποίησε γράμματα για να δηλώσει ποσότητες ή οποιοδήποτε αντικείμενο της σκέψης. Αυτός όμως που συστηματοποίησε τις υπάρχουσες αόριστες τάσεις και έδωσε το πρώτο στοιχειώδη αλγεβρικό συμβολισμό ήταν ο **Διόφαντος** που έζησε κατά τον 3 μ.χ. αιώνα. Τα έργα του περιλαμβάνουν τα «*Αριθμητικών Βιβλία ιγ'*», το «*Περί Πολυγώνων Αριθμών*» και τα «*Πορίσματα*». Από το πρώτο σώθηκαν έξη βιβλία, από το δεύτερο λίγα αποσπάσματα, ενώ το τρίτο χάθηκε εντελώς. Ο Διόφαντος ήταν ο πρώτος που άρχισε να χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα και να λύνει με τη βοήθειά τους αλγεβρικά προβλήματα και θα μπορούσε έτσι να θεωρηθεί σαν ο πατέρας της άλγεβρας. Εκτελούσε αλγεβρικούς πολλαπλασιασμούς και γνώριζε να καταστρώνει εξισώσεις και να συσχετίζει τα μέλη τους με την ένδειξη ίσος. Στα αλγεβρικά προβλήματα που έλυνε δεχόταν μόνο τις θετικές λύσεις, απορρίπτοντας τις αρνητικές και φανταστικές τις οποίες χαρακτήριζε σαν «αδύνατες» ή «άτοπες».

Ασχολήθηκε επίσης με προβλήματα ανισοτήτων, γραμμικών συστημάτων και με απροσδιόριστη ανάλυση πρώτου, δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού. Επίσης με τη κατασκευή ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές ρητούς αριθμούς.

Ο ΠΑΠΠΟΣ

Ο Αλεξανδρινός **Πάππος** αποτελεί το τελευταίο μεγάλο μαθηματικό της αρχαίας εποχής, μετά τον οποίο ακολούθησαν κατά το πλείστον σχολιαστές των έργων των προγενεστέρων. Έδρασε το 3^ο μ.χ. αιώνα επί βασιλείας Διοκλητιανού. Αναφέρονται τα έργα του «*Χωρογραφία Οικουμενική*», «*Εις τα Βιβλία της Πτολεμαίου Μεγάλης Συντάξεως Υπόμνημα*», «*Ποταμούς τους εν Αιβύη*» και «*Ονειροκριτικά*» που δε διασώθηκαν. Έγραψε σχόλια για τα «Στοιχεία» και τα «Δεδομένα» του Ευκλείδη και ένα υπόμνημα για τα «Αναλήμματα» του Διόδωρου, όπου μιλούσε για την τριχοτόμηση ενός ευθύγραμμου τμήματος με τη κογχοειδή του Νικομήδους. Το σπουδαιότερο πάντως από τα έργα του, το οποίο διασώθηκε εκτός από το πρώτου βιβλίο και το μισό (τα 13 πρώτα κεφάλαια) του δευτέρου είναι η «*Συναγωγή*» υποδιαιρεμένη σε οκτώ συνολικά βιβλία. Στη «Συναγωγή» του ο Πάππος μας δίνει σημαντικότερες πληροφορίες για τις εργασίες πολλών αρχαίων μαθηματικών που δεν είναι γνωστές από άλλες πηγές. Συγχρόνως κρίνει όλες αυτές τις εργασίες και προχωρά σε προσωπικές γενικεύσεις και επινοήσεις. Με τα προβλήματα της «Συναγωγής» ασχολήθηκαν πολλοί νεότεροι μαθηματικοί μεταξύ των οποίων και ο Fermat.

Στο 14^ο κεφάλαιο του δευτέρου βιβλίου της «Συναγωγής» παρουσιάζονται οι μέθοδοι που χρησιμοποίησε ο Απολλώνιος στην εκτέλεση των πολλαπλασιασμών. Το τρίτο βιβλίο ασχολείται με γεωμετρικά προβλήματα και διαιρείται σε πέντε τμήματα. Στο πρώτο τμήμα διαιρούνται τα προβλήματα σε επίπεδα, στερεά και γραμμικά. Τα πρώτα λύνονται με το κανόνα και το διαβήτη, τα δεύτερα με τομές στερεών και τα τρίτα με πιο σύνθετες γραμμές από τις καμπύλες β^{ου} βαθμού. Το δεύτερο τμήμα αναφέρεται στις αναλογίες και γενικεύει τη διδασκαλία τους σε μια γενική θεωρία περί μέσων προσθέτοντας στους έξη παλιούς άλλους τέσσερες νέους αριθμητικούς μέσους. Εξετάζει γενικά προβλήματα της θεωρητικής αριθμητικής. Το τρίτο τμήμα εξετάζει

διάφορες παράδοξες προτάσεις της γεωμετρίας. Το τέταρτο τμήμα ασχολείται με την εξέταση των πέντε κανονικών πολυέδρων, τα οποία αυτός παράγει από τη σφαίρα και το τελευταίο πέμπτο τμήμα δίνει μια άλλη λύση του Δηλίου προβλήματος.

Το τέταρτο βιβλίο αρχίζει με το γνωστό από την επιπεδομετρία «θεώρημα του Πάππου» και περιέχει προτάσεις για εφαπτόμενους κύκλους και για διάφορες καμπύλες (σπειρική, κογχοειδής, έλικα και τετραγωνίζουσα). Αναφέρει επίσης τη «πλεκτοειδή επιφάνεια» και τελειώνει με μια πραγματεία για τη τριχοτόμηση της γωνίας. Το πέμπτο βιβλίο εξετάζει σχήματα και σώματα με την ίδια περίμετρο (ισοπερίμετρα) ενώ το έκτο βιβλίο είναι μια έκθεση για το γνωστό αστρονομικό έργο «Μικρός Αστρονομούμενος».

Το σπουδαιότερο από όλα τα βιβλία της «Συναγωγής» είναι το έβδομο που αποτελεί μία έκθεση για τον «αναλυόμενο τόπο», απαριθμώντας 33 βιβλία σχετικά με αυτόν, στα οποία ο Πάππος κάνει κριτικές παρατηρήσεις και συμπληρώσεις. Στην αρχή δίνεται μια θαυμάσια και πληρέστατη περιγραφή της αναλυτικής μεθόδου της γεωμετρίας. Στο ίδιο βιβλίο παρουσιάζεται αυτούσιο το δήθεν «Θεώρημα του Γκουλντέν» δηλαδή ότι «το σχήμα που παράγεται διά περιστροφής επιφανείας γύρω από ακίνητο άξονα έχει όγκο ίσο με το γινόμενο της γενέτειρας επιφανείας του επί την περιφέρεια που διαγράφει το κέντρο βάρους».

Το όγδοο και τελευταίο βιβλίο της «Συναγωγής» εξετάζει διάφορα μηχανικά προβλήματα και δίνει το μοναδικό σε όλη την αρχαιότητα ορισμό του κέντρου βάρους: «Το κέντρο βάρους ενός σώματος είναι ένα σημείο εντός αυτού, τέτοιο ώστε αν φαντασθούμε το βάρος εξαρτημένο από αυτό, να μένει σε ηρεμία ακόμα και εάν υφίσταται ώθηση και να διατηρεί την αρχική του θέση». Στο βιβλίο αυτό εξετάζει και το πρόβλημα της κίνησης μεγάλων βαρών με μικρότερες δυνάμεις και της κατασκευής οργάνων με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να κατασκευάσουμε ορισμένες καμπύλες. Παρουσιάζει επίσης το πρόβλημα της σχεδίασης καμπύλης δευτέρου βαθμού της οποίας δύνονται πέντε σημεία και της εγγραφής σε ένα κύκλο επτά κανονικών εξαγώνων που να πληρούν ορισμένες συνθήκες. Μιλάει επίσης και για μια έλικα που μπορεί να γραφεί σε σφαίρα κατ' αναλογία με την εγγραφή της πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια.

ΟΙ ΣΧΟΛΙΑΣΤΕΣ ΤΗΣ ΝΕΟΠΛΑΤΩΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

Από τον 3^ο μ.χ. αιώνα που ιδρύθηκε η νεοπλατωνική σχολή, αναγεννήθηκε το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Ο **Πλωτίνος** (204-270μ.χ) συνιστούσε τη διδασκαλία των μαθηματικών στους νέους «προς συνετισμόν της αοράτου φύσεως». Ο μαθητής του **Πορφύριος** (232-301μ.χ.) έγραψε αστρονομικά βιβλία μεταξύ των οποίων και την «*Εισαγωγήν Αστρονομουμένων εν Βιβλίοις Τρισίν*». Ασχολήθηκε και με το σχολιασμό των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Διασώθηκαν σχόλιά του και στα «Αρμονικά» του Πτολεμαίου. Σύγχρονος του ήταν ο **Ανατόλιος** για τον οποίο αναφέρεται ότι ήταν γνώστης «της αριθμητικής, της γεωμετρίας και της αστρονομίας και της άλλης διαλεκτικής και ακόμα της φυσικής θεωρίας και των ρητορικών μαθημάτων». Του αποδίδεται το έργο «Αριθμητικές Εισαγωγές», το ο οποίο χάθηκε. Τα «*Θεολογούμενα της Αριθμητικής*» του μαθητή του Ιάμβλιχου θεωρούνται ότι προέρχονται από αυτόν. Σε αυτό παρουσιάζονται οι ιδιότητες των δέκα πρώτων αριθμών σύμφωνα με τις αντιλήψεις των Πυθαγορείων.

Ο μαθητής στα μαθηματικά του Ανατόλιου και στη φιλοσοφία του Πορφύριου **Ιάμβλιχος** έγραψε ένα μεγάλο έργο για τη «*Συναγωγή των Πυθαγορείων Δογμάτων*» από το οποίο σώθηκαν οι εξής πραγματείες: «*Περί του Πυθαγορικού Βίου*». «*Περί της Κοινής Μαθηματικής Επιστήμης*», «*Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής*» και τα προαναφερθέντα «*Τα Θεολογούμενα της Αριθμητικής*». Σαν ένα δεύτερο βιβλίο περιλαμβάνονταν τα έργα του «*Δεύτερος Λόγος*» και ο «*Λόγος Προτρεπτικός εις Φιλοσοφίαν*».

Στα βιβλία του ο Ιάμβλιχος μας δίνει πολλές πληροφορίες για τις μαθηματικές θεωρήσεις των πυθαγορείων και πολύτιμες πληροφορίες για το έργο των αρχαιότερων μαθηματικών.

Με το θάνατο του Ιαμβλίου το 330 μ.χ. τελειώνει η καθαρά αρχαία περίοδος της Ελληνικής μαθηματικής επιστήμης και μπαίνουμε στην ιστορική Χριστιανική περίοδο του Ελληνισμού. Μας υπολείπονται όμως και μερικοί άλλοι σπουδαίοι Έλληνες μαθηματικοί τους οποίους θα πρέπει να αναφέρουμε, οι οποίοι ακολούθησαν την αρχαία σοφία και δεν υποτάχθηκαν στο νέο δόγμα.

Ο **Σερήνος** έγραψε αρκετά μαθηματικά έργα από τα οποία διασώθηκαν το «*Περί Κυλίνδρου Τομής*» και το «*Περί Κώνου Τομής*», τα οποία στηρίζονται στα συγγράμματα του Απολλωνίου. Είχε γράψει και σχόλια πάνω στα «Κωνικά» του Απολλωνίου. Σημαντική θεωρείται η λύση που δίνει στο πρόβλημα στο οποίο δοθέντος ενός κώνου ζητείται να βρεθεί κύλινδρος έτσι ώστε οι ελλειπτικές τομές τους υπό ενός επιπέδου να είναι όμοιες.

Ο γεωμέτρης και αστρονόμος **Θέων ο Αλεξανδρεύς** (330-395μ.χ) έδρασε στην Αλεξάνδρεια και έγραψε σχόλια για τη «Σύνταξη» του Πτολεμαίου στα οποία αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποιεί, έτσι ώστε να μπορεί να καθοριστεί η συμβολή των προγενέστερων ερευνητών. Εξέδωσε ακόμα και τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη μετά σχολίων. Κόρη του υπήρξε η **Υπατία** (375-415 μ.χ.), η οποία δίδασκε φιλοσοφία, γεωμετρία και αστρονομία στην Αλεξάνδρεια. Η παράδοση αναφέρει ότι έγραψε σχόλια πάνω στα «Κωνικά» του Απολλωνίου και στον Διόφαντο. Κανένα από τα έργα της δε διασώθηκε. Πέθανε από φριχτά βασανιστήρια και διαμελισμό του σώματός της από το φανατικό χριστιανικό όχλο της Αλεξάνδρειας. Κατατάσσεται στους μάρτυρες της επιστήμης.

Ο νεοπλατωνικός **Πρόκλος** (410-485 μ.χ.) δίδαξε στη σχολή των Αθηνών. Διασώθηκε το βιβλίο του «*Εις το εις το α' των Ευκλείδου*», που αποτελεί σχόλια στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και θεωρείται πολύτιμο, διότι μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την ιστορική ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Επίσης διασώθηκαν τα «*Υποτύψεις των Αστρονομικών Υποθέσεων*», «*Περί Σφαίρας*», «*Παράφρασις εις την Πτολεμαίου Τετράβιβλον*» και «*Στοιχείωσις Φυσική ή Περί Κινήσεως*» στην οποία εκθέτει με μαθηματικές αποδείξεις η θεωρία κινήσεως του Αριστοτέλη.

Σύγχρονος του Πρόκλου ήταν και ο φιλόσοφος **Δομνίνος**, μαθητής του **Συριανού** και συμφοιτητής του Πρόκλου. Αυτός είχε διαδεχθεί το Συριανό στη Σχολή των Αθηνών, αλλά μετά από έριδες με τους υπόλοιπους Πλατωνικούς παραιτήθηκε από τη διεύθυνση της σχολής και αντικαταστάθηκε από τον Πρόκλο. Διασώθηκε το έργο του «*Δομνίνου Φιλοσόφου Λαρισαίου Εγχειρίδιον Αριθμητικής Εισαγωγής*». Φαίνεται να έχει γράψει και ένα μεγαλύτερο έργο με τίτλο «*Αριθμητική Στοιχείωσις*»

Ο μαθητής του Πρόκλου **Μαρίνος** έγραψε σχόλια στα «Δεδομένα» του Ευκλείδη. Ο **Δαμάσκιος** που ανέλαβε τη διεύθυνση της Σχολής των Αθηνών κατά το 510μ.χ. λέγεται ότι είναι αυτός που έγραψε το 15^ο βιβλίο που προσαρτήθηκε στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Τέλος ο **Σιμπλίκιος** σχολίασε τα αριστοτελικά έργα. Τα σχόλιά του στα «Φυσικά» και στο «Περί Ουρανού» συγγράμματα του Αριστοτέλη περιλαμβάνουν πολύτιμες πληροφορίες για την ιστορία των μαθηματικών.

Δ.Ε.